数理解析研究所講究録
980巻 1997年 130-136

条件付アイソメトリック作用素

玉川大　量子通信研究施設　広田　修　(Osamu Hirota)

1。まえがき

光通信の発展過程においてその技術的諸問題は物理及び数学に大きな課題を提供してきた。光通信技術はもはや古典物理学で予想される性能の限界に近ずきつつある。次世代の通信科学を創造するためには新しい情報通信のための原理の発見が必要である。筆者らが検討している”条件付ユニタリー過程”［１、２］（本稿では条件付アイソメトリック過程と呼ぶ）は従来の情報通信の基本原理にない全く新しい通信原理を導出しうるものとして期待されている。しかしながら、その数学的理論の構築は極めて困難な問題を克服せねばならないためその発展はなかなか進んでいない。その一つの原因は情報理論的考え方と物理及び数学的視点が十分に融合されていない点にあると思われる。条件付アイソメトリック過程は量子状態の工学的変換技術の設計指針を与える事が第一の目的である。そのため変換過程を入力条件付の作用素で記述せねばならない。しかしながら、その量子状態の変換過程は純粋状態から純粋状態、及び純粋状態から混合状態へを記述せねばならないため、数学的困難が生じている。

このような変換過程を表す数学としてオペレーションの理論がある。オペレーションは混合状態への変換も含むため一般性があるが、量子通信の通信路を表すにはあまり都合が良くない。本稿では我々の目的とする量子通信路を適確に表す条件付アイソメトリック作用素（前は条件付ユニタリー作用素と呼んでいた。工学の論文では条件付ユニタリーを用いる）の基本的な定義をさらに明確にする事を目的としている。

2。情報通信過程

ここで、信号モードの Hilbert 空間を信号空間と呼びH_sと記し、外部モードの Hilbert 空間をH_vとすれば、拡張空間 H_{ex} は両空間のテンソル積で構成される：

$$H_{ex} = H_s \otimes H_v. \tag{1}$$

定義１　拡張空間から拡張空間への写像を拡大チャンネルと呼ぶ。

ここで拡張空間から同じ拡張空間へのユニタリー変換（作用素）が存在するものと

仮定する。

$$U: H_{\mathrm{ex}} \to H_{\mathrm{ex}}, \\ U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = I. \quad (2)$$

このユニタリー作用素は拡張空間上の量子状態変換過程としてのチャンネルを表す。このユニタリティは具体的な物理過程を考察する上で本質的な要求である。

定義 2 （情報信号空間の定義）
情報源シンボルの集合を $\{j\} \in J$ としよう。情報源 シンボルは量子状態のあるパラメーターに１対１対応させられるとき、その量子状態の集合を情報信号空間 H_{sb} とする。

ここで、情報信号空間は H_{s} の部分空間であり、具体的な物理モデルをチャンネルとみなしたとき、それに対する入力の量子状態の集合を表す空間となる。

３．条件付アイソメトリック作用素の一般的定義

文献１において初めて条件付アイソメトリック過程の概念が提案され、その重要性が論じられた。以下にこの条件付アイソメトリック過程を記述するための作用素の定義を改めて示す。ここであるパラメーターによってインデックスされた量子状態の集合 $\{|\psi_j\rangle\}$ がここで極めて重要な役割を果たす。これらのパラメーターは一般に物理量の量子期待値と考えられるものである。

定義 3 　Sをヒルベルト空間 H_s 中のベクトルの一つの族とする。この族の各ベクトル $|\psi_j\rangle$ に対し、次の性質をもつ線形作用素を対応させる。

$$\| \mathrm{T}_{(j)} |\psi_j\rangle \| = \| \, |\psi_j\rangle \| = 1$$

この非線形アイソメトリー $|\psi_j\rangle \mapsto \mathrm{T}_{(j)} |\psi_j\rangle$
はSの上の条件付アイソメトリック作用素と呼ばれる。

定義 4 　$\mathrm{T}_{(j)}$ が線形和に分解されうる時

$$\mathrm{T}_{(j)} = \sum_m T_m^{(j)}$$

$\mathrm{T}_{(j)}$ は $|\psi_j\rangle \mapsto (\sum_m T_m^{(j)}) |\psi_j\rangle \equiv |\psi_j) \in H_{\mathrm{Q}}$

なる作用素と定義する。ただし、H_{Q} は次の内積によって完備化された空間とする。

$$(\psi_j|\psi_i) = \frac{\{<\psi_j|(\sum_m T_m^{\dagger(j)})(\sum_n T_n^{(i)})|\psi_i>\}\,\delta_{m,n}}{\left\{\begin{array}{l}<\psi_j|(\sum_m T_m^{\dagger(j)})(\sum_n T_n^{(j)})|\psi_j>\delta_{m,n}\\ \times<\psi_i|(\sum_m T_m^{\dagger(i)})(\sum_n T_n^{(i)})|\psi_i>\}\,\delta_{m,n}\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

また、この時、H_{Q} のベクトル $|\psi_j)$ ：（擬量子状態）のディアド積は

$$|\psi_j)(\psi_j| = (\sum_m T_m)|\psi_j> < \psi_j|(\sum_n T_n^{\dagger})\delta_{m,n}$$

この時、$\mathrm{T}_{(j)}$ は S から H_{Q} への条件付混合アイソメトリック作用素と呼ばれる。$\mathrm{T}_{(j)}$ が単一要素であれば定義1に帰着する。

上記定義において H_{Q} は擬量子状態空間と呼ばれ、信号量子状態の情報及び性質を全て保存している。これらによって純粋状態及び混合状態への変換過程の作用素表現が可能になる。

この概念は初期状態に依存するダイナミックスを持つチャンネルを構築するために導入されたものである。すなわちそのダイナミックスはアイソメトリック作用素の族に支配される。もし、$|\psi_j>$ が初期状態として用意されるとき、$\mathrm{T}_{(j)}$ はユニタリー時間発展作用素として、$|\psi_j>$ に働く。このようなチャンネルを条件付アイソメトリック過程と呼ぶ。

このように、条件付アイソメトリック作用素が存在すればシステムの入力における相異なる量子状態の内積に対し、出力の内積の変化過程が作用素によって表現されることになる。このような表現は量子通信の技術的問題からの絶対的要請である。ここで内積の変化に対し次のようにクラス化できる。

（a）正の条件付アイソメトリック過程：内積が増加
（b）負の条件付アイソメトリック過程：内積が減少

4．条件付アイソメトリック過程の導出例

信号量子状態のパラメーターが、あるシフト作用素によって次のように表されるとき、条件付ユニタリー作用素をシステマチックに導出しうることを示したい。

$$|\psi_{\mathrm{in}}(\beta)>_{\mathrm{s}} = D^{(\mathrm{s})}(\beta)|0>_{\mathrm{s}}, \tag{3}$$
$$|\phi_{\mathrm{in}}(\gamma)>_{\mathrm{v}} = D^{(\mathrm{v})}(\gamma)|0>_{\mathrm{v}}. \tag{4}$$

この $D^{(\mathrm{s})}, D^{(\mathrm{v})}$ はシフト作用素であり、β, γ をサスセプターに対応する。

拡張空間上での出力状態をρ_{out}としよう。このとき、この出力状態の外部モードに関する部分トレースは出力の信号モードの量子状態を与える。その結果、考察下のチ

ャンネルの入力信号モードと出力信号モード間の関係が与えられる。

$$|\psi_{\mathrm{in}}(\beta)\rangle_s\langle\psi_{\mathrm{in}}(\beta)| \to \operatorname*{Tr}_{v} \rho_{\mathrm{out}}. \tag{5}$$

上記の入出力関係は信号モードチャンネルと呼ばれる。このチャンネルが我々が実際に制御、設計及び測定することのできる理論的対象システムである。

ここで情報信号空間の信号を入力とする信号モードチャンネルは条件付アイソメトリック過程となることを示す。全空間で定義されるユニタリー作用素をUとする。

一般に相互作用表現において入出力の量子状態は

$$\begin{aligned}
|\psi_{\mathrm{out}}\rangle_{s\otimes v} &= U\,|\psi_{\mathrm{in}}(\beta)\rangle_s\,|\phi_{\mathrm{in}}(\gamma)\rangle_v \\
&= U\,D^{(s)}(\beta)|0\rangle_s\,D^{(v)}(\gamma)|0\rangle_v \\
&= U\,D^{(s)}(\beta)U^{\dagger}U\,D^{(v)}(\gamma)U^{\dagger}U\,|0\rangle_s|0\rangle_v \\
&= \widetilde{D}^{(s)}(\beta)\,\widetilde{D}^{(v)}(\gamma)U\,|0\rangle_s|0\rangle_v \\
&= \widetilde{D}^{(s)}(\beta)\,\widetilde{D}^{(v)}(\gamma)U\,D^{(s)}(-\beta)|\psi_{\mathrm{in}}(\beta)\rangle_s|0\rangle_v.
\end{aligned} \tag{6}$$

ここでもし

$$U\,|0\rangle_s|0\rangle_v = |0\rangle_s|0\rangle_v. \tag{7}$$

であれば

$$|\psi_{\mathrm{out}}\rangle_{s\otimes v} = \widetilde{D}^{(s)}(\beta)\,\widetilde{D}^{(v)}(\gamma)D^{(s)}(-\beta)|\psi_{\mathrm{in}}(\beta)\rangle_s|0\rangle_v. \tag{8}$$

ただし

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}^{(s)}(\beta) &= U\;D^{(s)}(\beta)U^{\dagger}, \\
\widetilde{D}^{(v)}(\gamma) &= U\;D^{(v)}(\gamma)U^{\dagger}.
\end{aligned} \tag{9}$$

次に上の計算において

$$\widetilde{U} = \widetilde{D}^{(s)}(\beta)\,\widetilde{D}^{(v)}(\gamma)\;U\,D^{(s)}(-\beta). \tag{10}$$

あるいは

$$\widetilde{U} = \widetilde{D}^{(s)}(\beta)\,\widetilde{D}^{(v)}(\gamma)\;D^{(s)}(-\beta). \tag{11}$$

とおけば、出力状態は

$$|\psi_{\mathrm{out}}\rangle_{s\otimes v} = \widetilde{U}\,|\psi_{\mathrm{in}}(\beta)\rangle_s|0\rangle_v. \tag{12}$$

以上より、$\widetilde{U}$ は入力のサスセプターを内在する。

次に出力の量子状態は

$$
\begin{aligned}
\underset{v}{\mathrm{Tr}}\,\rho_{\mathrm{out}} &= \underset{v}{\mathrm{Tr}}\,\tilde{U}\left|\psi_{\mathrm{in}}(\beta)>_s\right|0>_v<0\left|<_s\psi_{\mathrm{in}}(\beta)\right|\tilde{U}^\dagger \\
&= \sum_m <_v\chi_m\left|\tilde{U}\right|0>_v\left|\psi_{\mathrm{in}}(\beta)>_s<\psi_{\mathrm{in}}(\beta)\right|<0\left|\tilde{U}^\dagger\right|\chi_m> \\
&\equiv \sum_m T_m{}^{(\beta)}\left|\psi_{\mathrm{in}}(\beta)>_s<\psi_{\mathrm{in}}(\beta)\right|T_m^{\dagger(\beta)}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

ただし

$$
T_m^{(\beta)} = {}_v<\chi_m\left|\tilde{U}\right|0>_v \tag{14}
$$

次に定義2より

$$
\mathrm{T}_{(\beta)} \equiv \sum_m T_m^{(\beta)} \tag{15}
$$

この作用素は S から H_Q へのサスセプターβをもつ条件付アイソメトリック作用素である事は容易に示せる。

5．オペレーションとの対応

通常の理論では信号モードは出力状態の外部モードに関する部分トレースを用いて次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
&\underset{v}{\mathrm{Tr}}\,|\psi_{\mathrm{out}}>_{s\otimes v}<\psi_{\mathrm{out}}| \\
&\quad = \underset{v}{\mathrm{Tr}}\,U\,|\psi_{\mathrm{in}}>_s|\phi_{\mathrm{in}}>_v<\phi_{\mathrm{in}}|_s<\psi_{\mathrm{in}}|U^\dagger \equiv \sum_m T_m\,\rho_{\mathrm{in}}\,T_m^\dagger
\end{aligned}
\tag{16}
$$

この形式は一般にオペレーションの理論体系に属する［３、４］。この形式では入力の信号依存性を含めないので量子通信に対し重要な情報を提供できない。これに関する詳細な議論は次回報告する。

6．情報チャンネルへの適用

6-1 古典的チャンネル

入力シンボルを$\{c_i\}$、出力シンボルを$\{d_i\}$とすれば、そのシンボル間の遷移確率をチャンネル行列と言う。

$$
\mathrm{P}(i\,|\,j) = [\,p_{ij}\,] \tag{17}
$$

この遷移は古典的確率によって定義されている。すなわち古典的雑音を持つチャンネルに対応する。

6-2 量子状態変換チャンネル

量子状態のパラメーターである古典的シンボル間の遷移が存在しない時、このチャンネルを純量子状態変換チャンネルという。すなわち、入力量子状態に対し出力量子状態が1：1で対応する。すなわち古典的には無雑音チャンネルに対応する。しかし、量子状態自身は別の形に変換されるものとする。量子通信では量子状態の性質がチャンネルの限界を与えるので状態変化が最も重要な要素となる。

(a) ユニタリーチャンネル

入力量子状態に対し、あるユニタリー作用素があって

$$\| U \mid \psi_{\mathrm{in}}^{(i)} >_{\mathrm{s}} \| = \| \mid \psi_{\mathrm{in}}^{(i)} > \| \qquad \forall_i \tag{18}$$

全ての量子状態間の内積は保存される。Uは変換過程を表すので、このUはユニタリーチャンネルを表すという。

(b) 条件付アイソメトリックチャンネル（内積非保存チャンネル）

これまで開発されてきた量子通信理論によって与えられる通信の限界はHelstrom限界と呼ばれる。この限界に対し次の補助定理がある。

補助定理（広田）[2]：Helstrom限界が破られるためには負の条件付アイソメトリック過程が存在せねばならない。

これより条件付アイソメトリックは量子通信の発展に重要な概念を提供することになる。今、入力量子状態のサスセプターを$\{\beta_i\}$とすれば信号量子状態は$\{|\psi(\beta_i)_{\mathrm{in}}>\}$となる。

(i) 純粋状態変換過程（文献５、例：Coherent state 入力）

量子状態が純粋状態に変換されるとき定義３が適用される。各信号量子状態に対し一つのアイソメトリック作用素が求められのでチャンネル表現は

$$\begin{bmatrix} |\psi(\beta_1)_{\mathrm{out}}> \\ |\psi(\beta_2)_{\mathrm{out}}> \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_{(\beta_1)} & & \\ & \mathrm{T}_{(\beta_2)} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\psi(\beta_1)_{\mathrm{in}}> \\ |\psi(\beta_2)_{\mathrm{in}}> \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{19}$$

このとき各出力状態の内積は$\mathrm{T}_{(\beta)}$の性質より保存されない。これにより条件付アイソメトリック作用素は内積非保存チャンネルを表す。

(ii) 純粋ー混合状態変換過程（文献５、例：Photon number state 、Squeezed state入力）

入力量子状態が混合状態に変換される過程では条件付アイソメトリック作用素は線形和で表される（定義４）。このとき出力状態は擬量子状態空間のベクトルとなる。した

がって条件付アイソメトリック作用素は入力量子状態 VS 擬量子状態への変換としてのチャンネル表現を与える。当然、擬量子状態の内積は保存されない。

謝辞：助言いただいた大矢、小嶋 先生に感謝します。討論いただいた山崎、佐々木各位に御礼申します。

文献

(1) O.Hirota: in Quantum aspect of optical communications, edited by Bendjaballah, Hirota, &Reynaud, Lecture note in Physics 378, Springer-Verlag, 1991.
(2) O.Hirota: Phys. Lett. A, 155A, p 343, 1991.
(3) E.B.Davies: Quantum theory of open systems, Academic press, 1976.
(4) K.Kraus: States, effect and operations, Lecture note in Physics 190, Springer-verlag, 1983.
(5) O.Hirota: Open system and information dynamics, vol 2, no 2, 1993.